יוסף ברנשטיין

מתמטיקה כענף של מדעי הטבע

אתאר את נקודת מבטי האישית על מהות המתמטיקה ויחסיה עם שאר מדעי הטבע ועם העולם האמתי. דבריי הם בבחינת עדות אישית ואינם בעלי תוקף אוניברסלי. מקצת עמיתיי למקצוע מחזיקים בנקודות מבט אחרות, לכן תוכלו לקבל את דבריי כעדות ראייה של אדם שהיה בשטח וראה את הנעשה במו עיניו.

מהם נושאי המחקר בתחום המתמטיקה? אני חושב שאין מדובר במספרים. אני טוען שנושאי המחקר המתמטי הם מה שקרוי 'מבנים מתמטיים'.

מספרים וצורות גאומטריות הם מבין הדוגמאות העתיקות ביותר של מבנים מתמטיים. אחר כך פותחו עוד מבנים חשובים כגון פונקציות, נגזרות, משוואות דיפרנציאליות. מבנים מתמטיים מודרניים ובעלי חשיבות רבה הם חבורות, אלגבראות ומודולים, מרחבים טופולוגיים ואלומות, יריעות וסכמות, קטגוריות ופנקטורים, פונקציות-L ועוד מבנים רבים.

הדעות מגוונות בדבר טבעם של המבנים הללו. הופתעתי להיווכח שרבים מבין עמיתיי למקצוע סבורים שהם יוצרים אותם מכוח דמיונם, כלומר ממציאים מראשם מבנים חדשים שלא היו במציאות קודם לכן. דעתי שונה לחלוטין. בשבילי המתמטיקה היא אמנות המחשבה והעיון, אמנות הגילוי של מבנים שכליים חדשים.

כאשר אני מתחיל לחשוב על בעיה מתמטית מסוימת (או ליתר דיוק, חושב על תחום שלם של שאלות), בדרך כלל אני מנסה להתעמק בבעיה, לחדור אל תוך מהותה האמתית, ואז לזהות את המבנים הבסיסיים שעומדים מאחורי מגוון העובדות באותו התחום.

תמיד קיימת אצלי הרגשה ברורה מאוד שאותם מבנים שאני חושף קיימים אי־שם במציאות, והמשימה שלי היא לבודד אותם, לקרוא להם בשמם, ואז למצוא מסגרת פורמלית שבה אוכל לנסח אותם וכתוצאה מכך להמחיש אותם לאנשים אחרים.

חשוב לציין שהמתמטיקה התפתחה להיות מדע פורמלי. כדי שהקהילה המקצועית תקבל את השגותיך לגבי מבנים מתמטיים עליהן להיות מנוסחות בשפה מקצועית פורמלית של משפטים והוכחות. בדרך כלל אין זו משימה קלה למצוא הוכחה למשפט מתמטי, אפילו כשאתה בטוח מעבר לכל ספק בנכונותו. לעתים נדרשים מחשבה יצירתית ומעוף כדי להמציא הוכחה כזאת, ולעתים צריך להשתמש בתחבולות מחשבה מפולפלות ובטריקים. הטריקים האלה הם כמובן המצאות הדמיון ואינם בגדר גילוי. המתמטיקאי ממציא טריק טכני חדש שלא היה שם קודם כדי להוכיח משפט מתמטי. לעתים קרובות אותו המשפט מוכח שוב ושוב בעזרת טכניקות אחרות וטריקים חדשים. אבל המבנים שעומדים מאחורי אותם המשפטים עומדים וקיימים ואינם תלויים בשום טכניקה או טריק. מצד אחר, לעתים קורה שטריק או טכניקה מסוימת הם הצצה ראשונה אל מבנים מתמטיים חשובים חדשים. למשל פונקציות-L הופיעו בפעם הראשונה בתור טריק טכני מפולפל בהוכחה של דריכלה למשפט 'המספרים הראשונים בסדרות חשבוניות'. לפונקציות האלה יש כיום תפקיד חשוב בתחומים רבים במתמטיקה.

שאלה מעניינת נוספת היא עד כמה אמתי הוא העולם של המבנים המתמטיים ומהי הזיקה בינו לבין העולם האמתי שסביבנו.

אני התחלתי לחשוב על שאלות כגון אלה בשלב מאוחר יחסית, כאשר הייתי בן 30–35. לפני כן הייתי צעיר, אהבתי מתמטיקה למדתי ועשיתי מתמטיקה בעיקר בגלל היופי הנאדר הגלום בה.

אולם כאשר התחלתי לחשוב על השאלות האלה והתחלתי לעיין ולהתעמק בקשר למחשבות ולרגשות האישיים שלי בנושא, נדהמתי להיווכח שבשבילי העולם המופשט של הרעיונות והמבנים המתמטיים הוא עולם ממשי לחלוטין ממש כמו עולם המציאות שאני חי בו, עולם שיש בו אלקטרונים ופרוטונים, שמשות ופלנטות, וכמו כן – עולם שאני נמצא בו בקרב אנשים ובני משפחה.

אני זוכר שניסיתי לנסח את מחשבותיי בדרך זו: יש שני עולמות – עולם הטבע ועולם הרעיונות, ושני העולמות האלה שלובים זה בזה שילוב עמוק מאוד ומסובך. המתמטיקה היא מדע שעניינו העיקרי לחקור ולהבין את אותו עולם של רעיונות.

בהדרגה החלה השקפתי להשתנות. כיום אני חושב שרובם של אותם רעיונות מופשטים הם ישויות ממשיות. זאת אומרת, הרעיונות האלה משקפים מבנים בסיסיים של הטבע ושל עולם העצמים האמתיים סביבנו.

אנסה להדגים את התזה הזאת בדוגמה קונקרטית:

נניח שאתה מנסה ללמוד את פעילות המוח. אפשר לעשות זאת בכמה רבדים. אמנה כמה אפשרויות וגישות לנושא:

- אפשר ללמוד את התגובות הכימיות שעומדות בבסיס הפעולה של הנוירונים.
- אפשר ללמוד את המבנה של הנוירון היחיד ושל אוכלוסיות גדולות של נוירונים, וכיצד מתבצעת התקשורת ביניהם.
- אפשר ללמוד את המבנה של יחידות אורגניות גדולות יותר במוח ולנתח את הפעילות שלהן. יחידה אורגנית מעניינת במיוחד היא מרכז הראייה במוח.
- אפשר ללמוד פעולות פשוטות של המוח כגון רפלקסים ותגובות מותנות.
- אפשר לנסות ללמוד את פעילות המוח ברובד הפשטה גבוה יותר, שהוא נושא המחקר של ענף הפסיכולוגיה, למשל.
- אפשר להציע עוד גישות.

כל אלה הן דרכים לגיטימיות ושימושיות מאוד למחקר מדעי של המוח.

הדבר המעניין הוא שכל גישות המחקר שתיארתי מתקיימות בכמה רבדים של הפשטה, ובמידה רבה הן בלתי תלויות זו בזו.

כל זה הדגמה טובה של תפישתי לגבי מהות המחקר של הטבע. אני חושב שיש תחומים רבים של מחקר בכמה רובדי הפשטה במסגרת מדעי הטבע. אני חושב שהמתמטיקה היא אחד מאותם תחומים. נושאי המחקר המתמטי הם המבנים הבסיסיים ביותר של הטבע. זאת כנראה הסיבה לכך שאותם מבנים מתמטיים מופשטים כל כך ורחוקים מההשגה היום־יומית. מצד אחר, זה מסביר מדוע המבנים המתמטיים שימושיים כל כך. אחרי הכול, אלה המבנים הבסיסיים ביותר של הטבע. נוסף על כך, כיוון שהם כלליים מאוד ולכן חופשיים ממסה של פרטים ספציפיים, הם נוטים להיות פשוטים יחסית.

לסיום, אסטה מעט מהנושא ואדבר על האפליקציות האפשריות של המתמטיקה. רוב הבעיות המתמטיות שאני עוסק בהן נראות מרוחקות מאוד מכל יישום אפשרי לבעיות העולם האמתי. אני סבור שזה רושם מוטעה.

אני נזכר באפיזודה שנזכרה באוטוביוגרפיה של נורברט וינר. וינר תיאר פגישה של המחלקה לפיזיקה באחת האוניברסיטאות בארצות־הברית בתחילת המאה העשרים. באותה פגישה דובר על תכנית הלימודים במחלקה והוחלט שסטודנט לפיזיקה אינו צריך ללמוד את תורת החבורות, זאת בשל אופייה המופשט והספק הגדול אם אי־פעם יימצא לה שימוש בפיזיקה. הרשו לי להזכיר לכם שתורת החבורות היא כיום את אחד הכלים המרכזיים בתחום הפיזיקה של האנרגיות הגבוהות.

אני מעז לנבא שבאמצע המאה הבאה תמצא המתמטיקה יישומים נוספים רבים וחשובים. רובם יבואו שלא מתחומי הפיזיקה. עיקר ההתפתחות יבוא מתחום תורת המספרים אל תוך ענף מדעי המחשב. וכל זאת אף על פי שתורת המספרים היא תחום מופשט ביותר, מופשט הרבה יותר מתורת החבורות.

אבל באמת אין זה חזון מקורי כל כך. הרי עובדה היא שההתפתחות הזאת כבר החלה.