

רנורמליזציה: מיפוי מערכות אטומיות או נומטריות למערכות מקרוסקופיות



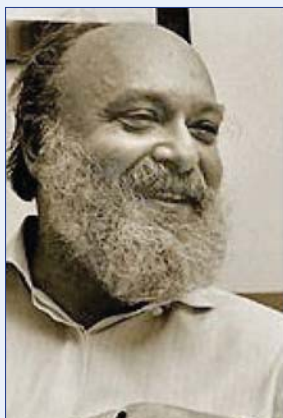
מאת פרופ' אמנון אהרוני

1. מבוא

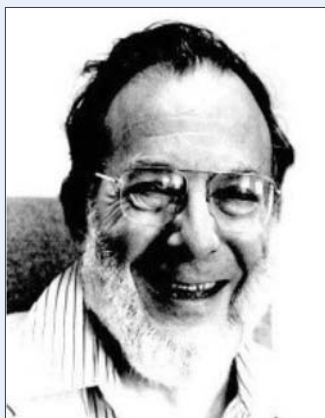
בדרך כלל התנהגותן הפיסיקלית של מערכות שונות תלויה בגודלן. כשמסתכלים על מערכות קטנות, בממדי אורך אטומיים, ובמערכות גדולות, בממדי אורך אסטרונומיים, רואים כי חוקי הפיסיקה משתנים: בכל ממד אורך שולטים כוחות פיסיקליים אחרים. עם זאת בהרבה מקרים ניתן למצוא קשרים בין ההתנהגויות הפיסיקליות בממדי אורך שונים, ובכך להעמיק את ההבנה של המערכות הנדונות. המאמר הנוכחי עוסק בקשרים הללו.

ב-2013 הלך לעולמו קנת וילסון, חתן פרס נובל בפיסיקה לשנת 1982 ופרס וולף בפיסיקה (עם מייקל פישר ולאן קדנוף יחד) לשנת 1980 (איור 1). הפרסים ניתנו על התאוריה של תופעות קריטיות בקשר למעברי פאזה. במשך שנים רבות היה ידוע כי למערכות שונות, שעוברות בין מעברי צבירה שונים (למשל בין גז לנוזל או בין מצב פרומגנטי, שבו יש לחומר מומנט דיפול מגנטי, כמו למחט של מצפן, למצב שבו המומנט הזה נעלם), יש התנהגות דומה כשמתקרבים אל נקודות המעבר הללו (למשל בשינוי הטמפרטורה). התופעה הזאת נקראת "אוניברסליות של מעברי פאזה", והיא נותרה חסרת הסבר שיטתי עד שנת 1971. בשנה הזאת פורסם מאמר של וילסון

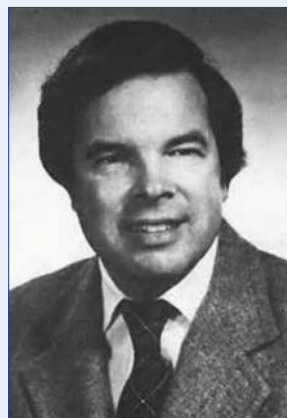
שהסביר את האוניברסליות הזאת בעזרת חבורת הרנורמליזציה, שאותה נסביר בהמשך. העבודה הזאת התבססה על רעיונות קודמים של קדנוף, שהציע קשרים בין מערכות בעלות ממדי אורך שונים. בשנת 1972 פורסם מאמר של פישר ווילסון, שהציעו חישוב שיטתי של התכונות האוניברסליות במערכות שהממד המרחבי שלהן קרוב ל-4. גם וילסון וגם פישר לימדו אז באוניברסיטת קורנל שבארצות הברית. באותה תקופה סיימתי את הדוקטורט שלי באוניברסיטת תל-אביב, בתחום של אנרגיות גבוהות, וחיפשתי תחום חדש למחקר. כשלמדתי על ההתפתחויות שהוזכרו לעיל, החלטתי לעבור השתלמות בתר-דוקטורט באוניברסיטת קורנל. אף שלא היה לי רקע קודם בתחום של מעברי פאזה, הסכים פישר לקבל אותי לקבוצת המחקר שלו שם. עבדתי בקורנל בשנים 1972-1974, וזה היה תור הזהב של הפיסיקה הסטטיסטית. הייתה שם קבוצה מצוינת של עמיתים בתר-דוקטורנטים מכל העולם, וילסון נתן סדרת הרצאות על עבודתו, וכולנו העלינו רעיונות חדשים להרחבת השיטה ולטיפול במערכות שונות. במשך ארבעים השנים שחלפו מאז עברתי לחקור נושאים רבים אחרים בפיסיקה. עם זאת לעתים קרובות חזרתי להפעיל את חבורת הרנורמליזציה על מערכות חדשות ולהסביר



לאו קדנוף



מייקל פישר



איור 1: קנת וילסון

הפרש הצפיפויות בין הנוזל לגז מתכונתי לחוק חזקה $(T_c - T)^\beta$, כש"המערך הקריטי" β איננו מספר שלם. מתברר שלכל המעברים בין נוזל לגז יש בשלושה ממדים מרחביים אותו ערך של המערך הקריטי הזה $\beta = 0.31$ - למרות ההבדלים הגדולים בין המבנים המולקולריים שלהם, בין הכוחות הפועלים בהם ובין הטמפרטורות הקריטיות שלהם. גם גדלים פיסיקליים אחרים (הדחיסות, החום הסגולי) מציגים התנהגות סינגולרית, שמאופיינת במעריכים קריטיים שונים, והמעריכים הקריטיים זהים לכל החומרים. התופעות הללו, שנקראות "תופעות קריטיות", זהות בסוגים רבים של מעברי פאזה, ולכן הן נקראות אוניברסליות. הפיסיקה הסטטיסטית היא הענף של הפיסיקה שבו הערך הנמדד של גודל פיסיקלי (במערכת מקרוסקופית מסוימת) מתקבל אחרי מיוצע שכולל את כל הקונפיגורציות המיקרוסקופיות האפשריות של המערכת המקרוסקופית, עם משקלות סטטיסטיים שתלויים באנרגייה של כל קונפיגורציה ובטמפרטורה של המערכת. סנטימטר מעוקב של מים מכיל בערך 10 בחזקת 23 מולקולות. המולקולות הללו נעות בתוך הנפח הזה ומתנגשות זו בזו. לכן חישוב מלא של כל הקונפיגורציות איננו אפשרי. במודל תאורטי של המערכת הזאת מחלקים את הנפח שלה לתאים קטנים באופן שכל תא יכול

באמצעותה את התנהגותן הפיסיקלית. המאמר הנוכחי נותן כמה דוגמאות מן המחקרים הללו.

2. מעברי פאזה ותופעות קריטיות

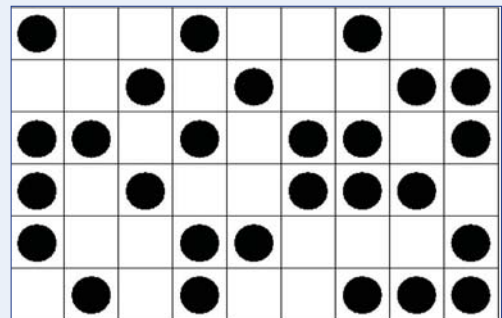
הדוגמה המוכרת ביותר של מעבר פאזה היא המעבר מנוזל לגז, למשל כשמרתחים מים. בלחץ אטמוספרי רגיל, כשמחממים את המים עד ל-100 מעלות צלזיוס, החימום נעצר, וחלקים מהנוזל (הצפוף יותר) הופכים להיות גז (שצפיפותו קטנה יותר) עד שכל החומר בכלי הופך להיות גז, ורק אז אפשר להמשיך ולחמם את האדים. מתברר כי כשמעלים את הלחץ על המים, טמפרטורת הרתיחה עולה, וההבדל בין צפיפויות הנוזל והגז בטמפרטורת הרתיחה קטן. בלחץ של 217 אטמוספרות טמפרטורת הרתיחה של מים היא בערך 374 מעלות צלזיוס, ואז הצפיפויות של הנוזל ושל הגז משתוות זו לזו. בלחצים גבוהים יותר אין הבדל בין הנוזל לבין הגז, והצפיפות של החומר קטנה ברציפות כשמעלים את הטמפרטורה. הנקודה המיוחדת שבה הצפיפויות של הנוזל ושל הגז משתוות זו לזו לראשונה, נקראת "הנקודה הקריטית". התלות המתמטית של תכונות פיסיקליות רבות בטמפרטורה T ליד הטמפרטורה הקריטית T_c היא סינגולרית (להבדיל מהתנהגות אנליטית). למשל,



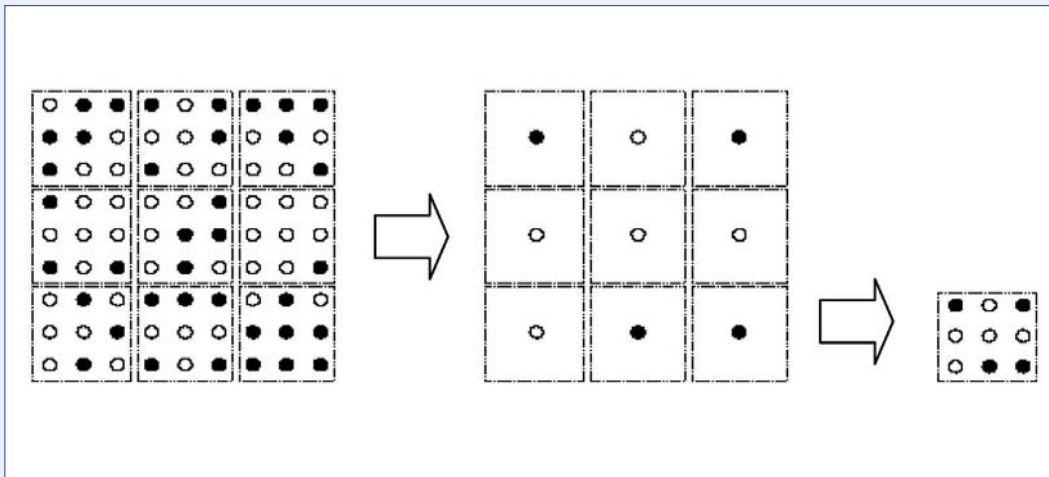
איור 3: קונפיגורציות אופייניות של אכלוס התאים בטמפרטורות גבוהות (א), בטמפרטורה הקריטית (ב) ובטמפרטורות נמוכות (א) [1]

בשנות השישים של המאה שעברה הציע קנדוף את התהליך של רנורמליזציה, שמתואר באיור 4: מחלקים את הדגם לקבוצות של תאים, למשל תאים ריבועיים, שכל אחד מהם מכיל תשעה תאים מקוריים (צד שמאל של איור 4), ומחליפים כל קבוצה כזאת בתא בודד חדש, שמכיל מולקולה אם רוב התאים המקוריים היו מאוכלסים, ונשאר ריק – אם רוב התאים היו ריקים (החלק האמצעי באיור). במובן מסוים התהליך הזה משמר את התכונות המקומיות של התאים המקוריים: אזורים צפופים יישארו צפופים, ואזורים ריקים יישארו ריקים. בשלב הבא מצמצמים את אורך התמונה פי שלושה, וכך המערכת החדשה נראית כמו חלק מהתמונה המקורית (צד ימין באיור). התהליך הזה דומה ל"זום" של התמונה: אם משנים את ההגדלה הנקטת בצילום התמונה, קשה להבחין בפרטים הקטנים בתוך כל קבוצת תאים, ובפועל כל קבוצה כזאת מוחלפת באזור בהיר או כהה, כמו התאים בצד הימני של התמונה. בכל הפעלה של תהליך הרנורמליזציה ממצעים על מידע שקשור למרחקים קטנים, וממפים את המערכת למערכת חדשה שבה המרחק הבסיסי בין מולקולות שכנות גדול יותר. כיון שמרחק הקורלציה הפיסיקלי איננו משתנה בתהליך הרנורמליזציה, הוא קטן (פי שלושה בדוגמה שבאיור 4) כשמודדים אותו

◀ להכיל לכל היותר מולקולה אחת, ומחשבים את האנרגייה של המערכת כאשר בכל תא יש, או אין, מולקולה. המודל הזה מודגם באיור 2 בסריג דו-ממדי של תאים כאלה. לבד ממקרים מיוחדים, גם למודל הפשוט הזה אין פתרון כללי. סימולציות נומריות של הקונפיגורציות האפשריות, עם ההסתברות המתאימה לכל אחת, מראות הבדלים איכותיים בין הקונפיגורציות שמתקבלות בטמפרטורות שונות. בטמפרטורות גבוהות מאוד הכוחות בין המולקולות אינם חשובים, ולכן הן מפוזרות פיזור אקראי בין התאים, כמו באיור 3א. זהו הגבול הקיצוני של גז. בטמפרטורות נמוכות מאוד המשיכה בין המולקולות חשובה, המולקולות "שואפות" להיות קרובות זו לזו ככל האפשר, ומתקבלות קונפיגורציות צפופות כמו באיור 3ג. זהו הגבול הקיצוני של נוזל. בטמפרטורות ביניים מתחת לטמפרטורה הקריטית מופיעות בתוך הנוזל בועות של גז (אזורים שמכילים הרבה תאים ריקים), ומעל לטמפרטורה הקריטית מופיעות בתוך הגז טיפות של נוזל (אזורים שמכילים הרבה תאים מאוכלסים). בטמפרטורה מסוימת הבועות (או הטיפות) מופיעות בגדלים שונים, שמוגבלים על ידי אורך אופייני שתלוי בטמפרטורה וגדל כשמתקרבים אל הטמפרטורה הקריטית. אורך זה נקרא "מרחק הקורלציה", והוא מתבדר לאינסוף בטמפרטורה הקריטית, שבה מופיעות בועות וטיפות בכל סקאלות האורך עד לגודל הדגם, כפי שנראה באיור 3ב.

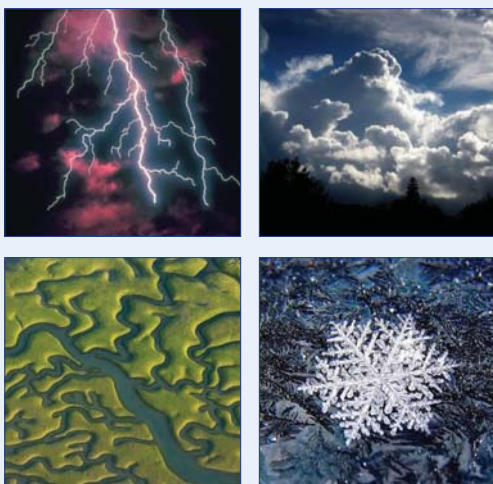


איור 2: מודל של המערכת נוזל-גז: כל תא מכיל מולקולה אחת או נשאר ריק



איור 4: הרנורמליזציה של קדנוף

סקאלת האורך שלה. מערכות שדומות לעצמן (לפחות על פני טווח מסוים של סקאלות אורך) נפוצות מאוד בטבע, והגאומטרייה שלהן נקראת "גאומטרייה פרקטלית". דוגמאות שמדברות בעד עצמן מוצגות באיור 5. גם את התכונות הפיסיקליות של מערכות כאלה אפשר לחקור בעזרת חבורת הרנורמליזציה. עד עבודתו של וילסון לא הייתה דרך שיטתית לקבל את החוקים הפיסיקליים החדשים ששולטים



איור 5: דוגמאות למבנים פרקטליים (דמויי-עצמם) בטבע

ביחידות האורך של הסריג החדש. הגודל המרבי של הבעות והטיפות קטן גם הוא, ולכן תמונת הסריג ה"מנורמל" דומה לזו שהיינו מקבלים אם היינו מבצעים את החישוב מלכתחילה בטמפרטורה הרחוקה מהטמפרטורה הקריטית. חוזרים על התהליך שוב ושוב, וממפים את המערכת המקורית שוב ושוב למערכות חדשות. כשהמרחק החדש בין שכנים קרובים ישתווה למרחק הקורלציה המקורי, ייעלמו הטיפות והבעות, והמערכת תיראה כמו מערכת בטמפרטורה נמוכה מאוד או כמו מערכת בטמפרטורה גבוהה מאוד.

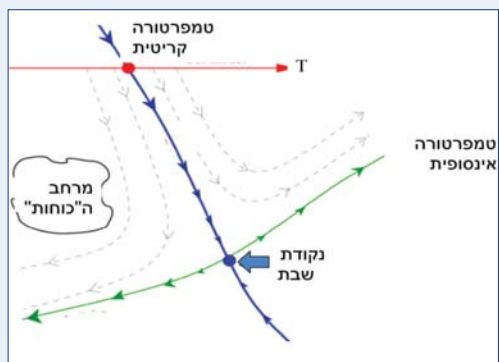
במובן מסוים, תהליך הרנורמליזציה מעביר את המערכת המקורית למערכת בטמפרטורה חדשה. כיון שהטמפרטורה קובעת את הסטטיסטיקה של הקונפיגורציות השונות, ולכן את הפיסיקה של המערכת, ניתן לומר שהרנורמליזציה משנה את חוקי הפיסיקה ששולטים על המערכת כפונקצייה של סקאלת האורך שבה מסתכלים על המערכת.

בדיוק בטמפרטורה הקריטית מרחק הקורלציה הוא אינסופי, ולכן הוא נשאר אינסופי גם אחרי הרנורמליזציה. משום כך התפלגות הטיפות והבעות איננה משתנה אחרי הרנורמליזציה. במילים אחרות, המערכת נשארת דומה לעצמה אף ששינינו את

היא תישאר תחילה קרובה אל תת-המרחב הזה ותתקרב אל נקודת השבת לפני שתתחיל להתרחק לכיוון טמפרטורות נמוכות או גבוהות. כתוצאה מה"זרימה" הזאת התכונות הפיסיקליות של המערכת ליד הנקודה הקריטית, שאותן אפשר לחשב גם אחרי צעדים רבים של רנורמליזציה, נשלטות על ידי הסביבה הקרובה של נקודת השבת, ומכאן האוניברסליות של התנהגות כל המערכות השונות: כל המערכים הקריטיים נקבעים על ידי נקודת השבת ולא על ידי הנקודה ההתחלתית במרחב ה"כוחות".

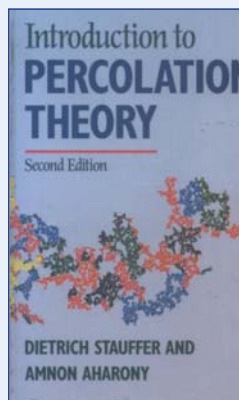
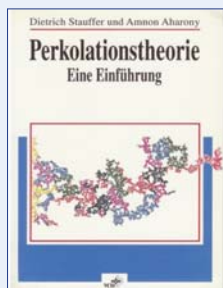
אילו כלל תת-המרחב הקריטי רק נקודת שבת אחת, כל מעברי הפאזה השונים בטבע היו מציגים אותה התנהגות פיסיקלית אוניברסלית, עם אותם מערכים קריטיים. שיטת החישוב שהציעו פישר ווילסון אפשרה מחקר שיטתי של הנושא, וחיש מהר התברר שיש יותר מנקודת שבת אחת. למשל, מגנט שבו המומנט המגנטי יכול להצביע לכל כיוון במרחב מתואר על ידי נקודת-שבת שונה מזו שמתארת מגנט שבו המומנט מוגבל לכיוון בודד במרחב. מאז הרבה מהמחקר של תופעות קריטיות התמקד בזיהוי נקודות שבת חדשות, שמתארות מערכות פיסיקליות שונות. אני בעצמי הייתי מעורב למשל בזיהוי מחלקות אוניברסליות חדשות שמתארות מערכות מגנטיות שמכילות אינטראקציות דיפוליות, מערכות בעלות סימטרייה קובית (ששוברת את הסימטרייה לסיבובים שקיימת במגנטים שהוזכרו לעיל), ובמיוחד מערכות שמכילות סוגים שונים של אי-סדר (למשל בגלל סגסוגות של מרכיבים אטומיים שונים). איור 7 מתאר למשל את תת-המרחב הקריטי של מערכת בעלת סימטרייה קובית, שחישבת ב-1976. למערכת הזאת יש ארבע נקודות שבת אפשריות, והממד המרחבי של המומנטים המגנטיים קובע איזו מהן היא ה"יציבה" ביותר, ולכן כל המערכות "זורמות" אליה ומתוארות על ידי "מחלקת האוניברסליות" שלה [2].

◀ על התנהגות המערכת אחרי הרנורמליזציה שלה. וילסון היה הראשון שהבין כי גם אם מתחילים את התהליך במערכת כוחות פשוטה (למשל כוחות משיכה בין מולקולות שכנות בלבד), דרושים הרבה כוחות נוספים כדי לשחזר את התנהגות המערכת המנורמלת [1]. לכן תהליך הרנורמליזציה שקול ל"זרימה" במרחב רב-ממדים, כשכל ממד שלו מייצג כוח פיסיקלי אחר. איור 6 מתאר זרימה כזאת: הציר האופקי בחלק העליון של האיור מייצג את הטמפרטורה ההתחלתית של המערכת, והנקודה באמצעו מייצגת את הטמפרטורה הקריטית. פעולת הרנורמליזציה יוצרת "כוחות" חדשים, ש"מוציאים" אותנו מהציר הזה, ומעבירה אותנו אל מערכות שמיצגות על ידי הנקודות על החצים המקווקוים באיור. אם מתחילים בטמפרטורות נמוכות (או גבוהות) מהטמפרטורה הקריטית, המערכת "זורמת" לאזור שבו היא נראית כמו מערכת בטמפרטורה אפס (או בטמפרטורה אינסופית). לעומת זאת, כיון שמרחק הקורלציה נשאר אינסופי בנקודה הקריטית, המיפוי שלה נשאר על תת-מרחב שבכולו המרחק הזה אינסופי, כפי שמורים החצים הכחולים המלאים באיור. וילסון הבין שבדרך כלל קיימת בתת-המרחב הזה נקודת-שבת שאליה "זורמות" כל המערכות הקריטיות. אם מתחילים קרוב מספיק לנקודה קריטית של מערכת כלשהי,

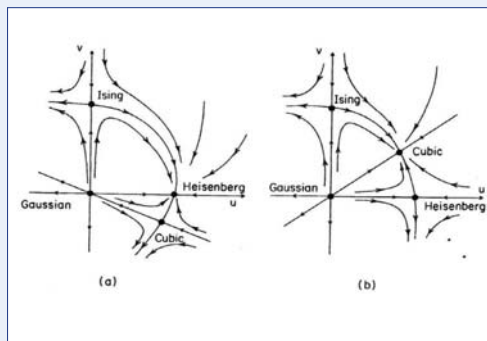


איור 6: זרימת ה"כוחות" הפיסיקליים בעקבות צעדים עוקבים של רנורמליזציה

הזאת מתנהגת כחוק חזקה סינגולרי, שמתכונתי ל- $(p - p_c)^{-\mu}$, ו- μ הוא המעריך הקריטי שמתאר את ההתנהגות הזאת. הנושא הזה נקרא "פרקולציה" (או "חלחול") בגלל הדמיון לזרימה של אדי מים בין גרגרי קפה שדחוסים באקראי בתוך פרקולטור. גם המערכים הקריטיים של בעיית הפרקולציה הם אוניברסליים, וגם אותם ניתן לחשב בשיטות של חבורת הרנורמליזציה. בשנות השמונים והתשעים של המאה הקודמת עסקתי הרבה במחקרים כאלה, ובעיקר בזמן מלחמת המפרץ ב-1991 כי אז סגרו את האוניברסיטאות בארץ, ובזמן שהתפנה השתתפתי (עם עמיתי דיטריך שטאופר מאוניברסיטת קלן) בכתיבת ספר על תורת הפרקולציה [3]. איור 8 מראה תצלומי כריכות של הספר הזה באנגלית, בגרמנית וביפנית. עלכריכות הספרים מוצגות סימולציות שונות של האזור ה"מוליך" בתוך התווך הנקבובי בקרבת סף הפרקולציה, וניתן לראות שגם הגאומטרייה שלהן היא פרקטלית: האזור המוליך דומה לעצמו בכל סקאלת אורך, והוא חוזר אל עצמו (באופן סטטיסטי) כאשר מפעילים עליו רנורמליזציה מהסוג שתואר לעיל. במקרה של פרקולציה, ה"זרימה" ◀



איור 8: הספר על תורת הפרקולציה



איור 7: תת-המרחב הקריטי של מערכות בעלות סימטרייה קובית

3. פרקולציה ומאגרי נפט

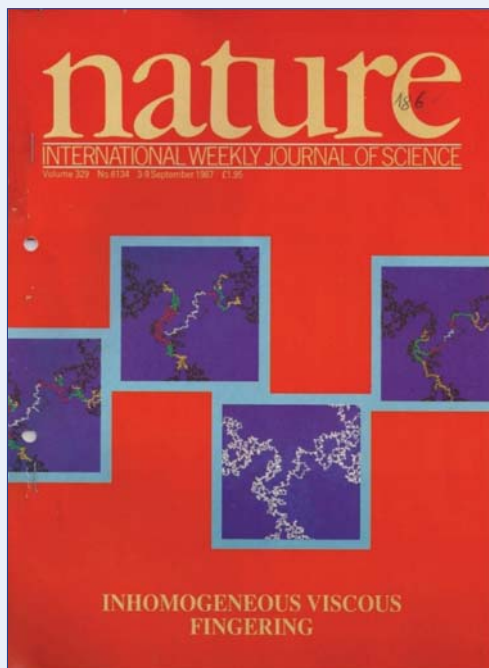
המחקר של מערכות לא מסודרות קשה מזה שתואר לעיל, כי במערכות כאלה המרכיבים האקראיים של המערכת "קפואים" במקומותיהם ואינם עוברים במהלך המדידה על כל הקונפיגורציות המיקרוסקופיות שלהם. צריך קודם לחשב את התכונות הפיסיקליות של קונפיגורציה בודדת, ורק אז למצע על התכונות של מערכות שונות. אחת הדוגמאות הפשוטות ביותר של מערכת לא מסודרת היא מערכת שמורכבת מסידור אקראי של שני מרכיבים. למשל, איור 2 יכול לתאר מודל של סלע נקבובי, שבו תאים מלאים מייצגים חלקים של הסלע, ותאים ריקים מייצגים חללים בתוך הסלע. אם רוב התאים מלאים, אי אפשר למצוא מסלול שמחבר בין תאים ריקים שמוליך מצד אחד של הדגם לצד הנגדי שלו. כאשר ריכוז התאים הריקים עולה, מגיע ריכוז קריטי שבו נוצר לראשונה מסלול כזה. בריכוזים גבוהים יותר החלק של הדגם שמחבר בין שני קצותיו הולך וגדל. אם החלק הזה מכיל נוזל (למשל נפט בתוך סלע נקבובי), ה"יכולת" לשאוב את הנוזל מתוך הסלע (שנמדדת באמצעות המוליכות – הפרמיאביליות – של הסלע הזה לזרימה של הנוזל דרכו, כתגובה להפרש לחצים בין קצותיו) גדלה בהדרגה. אם מסמנים את ריכוז התאים הריקים ב- p , ואת ריכוז הסף הקריטי ב- p_c , אז המוליכות

פיסיקליים ספציפיים ובחיקוי התופעות הפיסיקליות למאגרי הנפט בסקאלות אורך מעבדתיות. איור 9 מראה את שער העיתון (Nature מספטמבר 1987) [4], שמציג תמונות של נוזל צמיג שזרם בתוך שכבה מישורית שהכילה סידור אקראי של כדורים פלסטיים. מחקרנו שילב את העבודה הניסיונית הזאת עם חישובים תאורטיים שהשתמשו בתורת הפרקולציה, ומצא התאמה טובה מאוד בין החישובים למדידות.

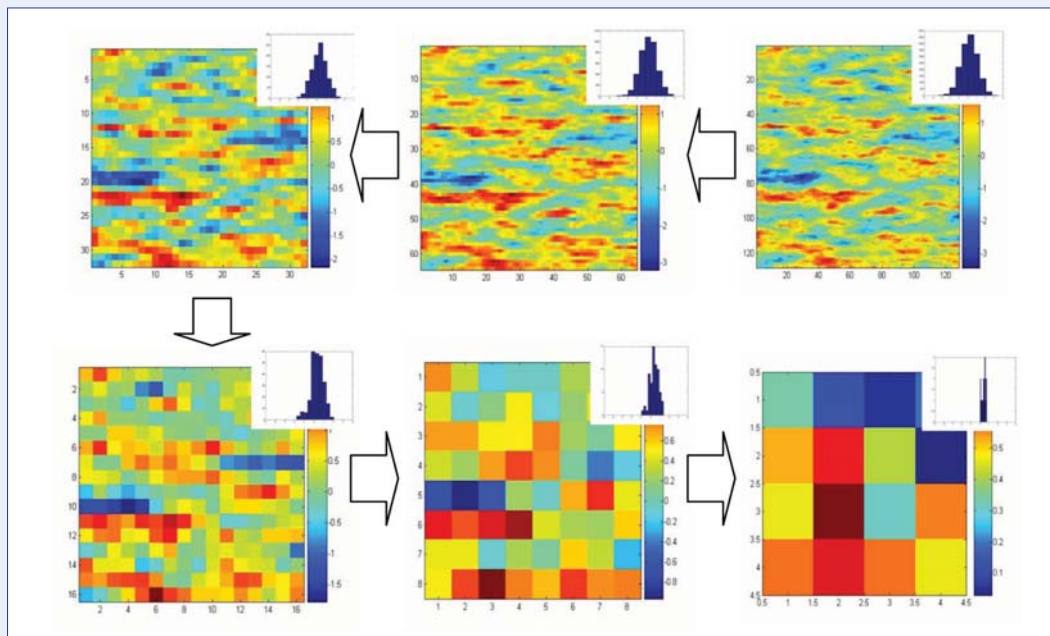
לפני שמחליטים על הקמת מגדל קידוח של באר שדרכה יופק נפט ממעמקי הים, חשוב מאוד להעריך עד כמה יהיה קל להפיק את הנפט מהסלע שבקרקעית הים. לצורך זה מבצעים קידוחי ניסיון ומוציאים גלילים ארוכים מאוד (קילומטרים) של סלע, בקוטר אופייני של כעשרה סנטימטרים. בודקים את הגלילים בדיקה מעבדתית יסודית, שנותנת בין היתר מידע מפורט על המוליכות שלהם לזרימה של נוזל דרכם, ועל הקורלציות הסטטיסטיות בין הערכים שלה בחלקים שונים של הקידוח ובקידוחים שונים שמפוזרים בנקודות שונות של המאגר. בשלב הבא יש לעשות אינטרפולציה (ביון) של הנתונים לאזורים שבין הקידוחים השונים, ואקסטרפולציה (חיוץ) של המידע הזה אל כל חלקי המאגר. בסוף השלב הזה מתקבל מיפוי "מיקרוסקופי" של המוליכויות במקומות שונים במאגר. נתונים אלה ישמשו להערכת המוליכות המקרוסקופית בין נקודות רחוקות של המאגר, במרחקים של קילומטרים. במחקר שעשינו ב-1991 הצענו שיטת רנורמליזציה שמחשבת את המוליכות של תאים הולכים וגדלים, עד שמתקבלת המוליכות של המאגר כולו [5]. השיטה נקראת Fast Renormalization – FRACTAM – Anisotropic Media Algorithm for Correlated Transport in הוא מהיר מאוד (לעומת אלגוריתמים שפותרים את המשוואות לחישוב הזרמים בכל התאים המקוריים) ומדויק מאוד (לעומת אלגוריתמים מקורבים אחרים). איור 10 מראה את ערכי המוליכות (שמוצגים כל אחד בצבעים שונים אלה מאלה) בשלבים שונים של

◀ של חבורת הרנורמליזציה איננה של "כוחות" כי אם של ריכוזים ושל קורלציות בין תאים מאוכלסים לתאים ריקים.

רבים ממחקריי על זרימה בתווך נקבובי נעשו באוניברסיטת אוסלו, שם הייתי פרופסור נלווה ב-25 השנים האחרונות. כאשר התגלה הנפט בים הצפוני, מיהרה ממשלת נורווגיה לאשר חוק שחייב את חברות הנפט להשקיע חלק מרווחיהן במחקר אוניברסיטאי בסיסי על נושאים שקשורים למאגרי נפט. מחקרים רבים באוניברסיטת אוסלו אכן מומנו ממענקים מחברות כמו סטטאויל וקונוקו. בהמשך הוקם באוניברסיטה מרכז מצוינות שנקרא "פיסיקה של תהליכים גאולוגיים", שבו נעשו מחקרים בין-תחומיים ששילבו בין השאר פיסיקה וגאולוגיה, ואני הייתי חבר בוועדה שניהלה אותו. כיוון חשוב של המחקר עסק בבניית מודלים מעבדתיים (ותאורטיים) שלוכדים אספקטים



איור 9: ניסיונות וחישובים תאורטיים של זרימת נוזל צמיג בתווך נקבובי



איור 10: חמישה שלבים של רנורמליזציה של ערכי המוליכות במודל של מאגר נפץ. ההיסטוגרמה בצד ימין למעלה של כל מערכת מתארת את ההתפלגויות של המוליכות בתאים השונים של אותו דגם. הצבעים השונים מייצגים את הערכים עצמם, לפי הסקאלה שמוצגת בצד ימין של כל מסגרת.

מ־2013 חקרנו (עמיתיי יוסף אמרי ואורה אנטין־ וולמן ואני עם העמיתה הבת־דוקטורנטית חמוטל ברי־סרוקר) איך ההתנהגות הפיסיקלית של מערכות קטנות משתנה עם השתנות הגודל שלהן [6]. כאשר אלקטרונים נעים בתוך מתכת, פועלים ביניהם שני סוגים של כוחות: כוח אחד הוא כוח הדחייה החשמלית ביניהם, מאחר שיש להם אותו מטען חשמלי שלילי; כוח אחר נוצר בגלל האינטראקציה בין האלקטרונים לבין היונים החיוביים במתכת. כאשר אלקטרון עובר בין היונים הללו, המשיכה בינו לביניהם גורמת לעיוות הסריג שעליו נמצאים היונים. אלקטרון אחר "יעדיף" לעבור באותו המקום ולנצל את הקונפיגורציה המעוותת הזאת של היונים כדי "להרויח" אנרגיה חשמלית. התיאור הזה נותן הסבר איכותי להופעתו של כוח משיכה אפקטיבי בין שני האלקטרונים. הכוח הזה מתחיל להיות מורגש על ממדי אורך ◀

הרנורמליזציה. כפי שניתן לראות מהגרפים שבחלק הימני העליון בכל מסגרת, ההתפלגות של ערכי המוליכות בתאים השונים נעשית צרה יותר ויותר עם התקדמות התהליך, מה שמעיד על התכנסות טובה אל התוצאה הסופית.

4. מוליכות על

פי שהוסבר לעיל, חבורת הרנורמליזציה מאפשרת לקבל את תכונותיה של מערכת גדולה מתוך תכונותיה המיקרוסקופיות. בשנים האחרונות התפתח מאוד המחקר על מערכות מזוסקופיות, שגודלן נמצא בין הגודל המיקרוסקופי לבין הגודל המקרוסקופי. ניסיונות רבים נעשים כיום על מערכות ננומטריות הגדולות רק פי עשרה או פי מאה מהגודל של אטומים בודדים. מערכות קטנות כאלה מתוארות על ידי המכניקה הקוונטית. במאמר

מקורות

- K. G. Wilson, *Problems in physics with many scales of length*, Scientific American 241, #2, 158-179 (1979).
- A. Aharony, *Dependence of universal critical behavior on symmetry and range of interaction*, in Phase Transitions and Critical Phenomena, C. Domb and M. S. Green, eds., Vol. 6 (Academic Press, NY, 1976), pp. 357-424.
- D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor and Francis, London (1992); revised 2nd edition (1994); German translation: VCH, Weinheim (1995); Japanese translation: Yoshiokashoten, Kyoto (2001)).
- U. Oxaal, M. Murat, F. Boger, A. Aharony, J. Feder, and T. Jøssang, *Viscous fingering on percolating clusters*, Nature 329, 32-37 (Sept., 3 1987).
- A. Aharony, E. I. Hinrichsen, A. Hansen, J. Feder, T. Jøssang, and H. H. Hardy, *Effective renormalization group algorithm for transport in oil reservoirs*, Physica A177, 260-266 (1991).
- H. Bary-Soroker, O. Entin-Wohlman, Y. Imry, & A. Aharony, *Scale-dependent competing interactions: sign reversal of the average persistent current*, Phys. Rev. Lett. 110, 056801 (2013).

◀ שגדולים מאורכי הגל האופייניים לתנודות של היונים בסריג. בתנאים מתאימים הכוח הזה עשוי להתגבר על כוח הדחייה הישיר בין האלקטרונים וליצור זוגות של אלקטרונים שנקראים "הזוגות של קופר". הזוגות הללו הם מוליכי המטען במוליכי-על, שבהם הם יכולים לנוע ללא התנגדות חשמלית. במחקרנו חישבנו את הרנורמליזציה של שני הכוחות הללו ומצאנו כי כוח הדחייה הולך ונחלש כשעוברים לממדי אורך גדולים יותר, ואילו כוח המשיכה האפקטיבי הולך ומתחזק כשמגדילים את גודל המערכת. לכן במקרים מסוימים הכוח השקול הוא דוחה בממדים קטנים והופך להיות מושך בממדים גדולים. גם אם המערכת הופכת להיות מוליך-על כאשר גודלה מקרוסקופי, היא תפסיק להיות כזאת כאשר היא קטנה מספיק.

במאמרנו הצענו דרך ניסיונית לבדוק את תלותו של הכוח השקול בגודל המערכת. כאשר מפעילים שדה מגנטי בכיוון מאונך לטבעות קטנות של מתכת, זורם בטבעות הללו זרם שנקרא "זרם מתמיד" (persistent current) כיוון הזרם הזה מתהפך כשהכוח השקול הופך ממושך לדוחה. לכן מדידות של הזרם בטבעות בעלות קטרים ננומטריים שונים עשויות לגלות את הכוח מחליף את טבעו, ולשמש אישור לתאוריה.

5. סיכום

▮ ארבעים השנים שחלפו מאז עבודתו פורצת הדרך של קנת וילסון הופעלו שיטות הרנורמליזציה שלו על מגוון רחב מאוד של מערכות פיסיקליות. הטבע מכיל מערכות פרקטליות רבות, שדומות לעצמן בממדי אורך שונים, וכן מערכות רבות שבהן הפיסיקה תלויה באנרגיות שמתפרסות על טווח רחב של ערכים, ואין לי ספק שהכלים שהוצגו כאן ימשיכו לשמש להבנת הפיסיקה שלהן. ■