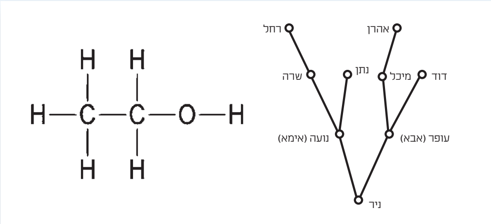
חידות על עצים, ממדים גבוהים, בחירות, חישוב ורעש

מאת **פרופ' גיל קלעי**

אספר כאן על כמה חידות מתמטיות שהעסיקו אותי במהלך השנים, ואף אחשוף לפניכם כמה מסודות המקצוע. החידה הראשונה עוסקת בחישוב מספרם של מבנים מתמטיים הנקראים "עצים"; החידה השנייה עוסקת בצורות גאומטריות בממדים גבוהים; החידה השלישית עוסקת בחסינות של שיטות בחירות בפני טעויות בספירת קולות; השאלה הרביעית עוסקת בהיתכנות של "מחשבים קוונטיים" – מערכות פיזיקליות היפותטיות שאם ייבנו יביאו למהפכה בתחום החישוב.

חידה 1: כמה עצים דו־ממדיים יש?

מתמטיקאים לעיתים קרובות משתמשים במילים לצרכים שלהם. למשל: "שדות" במתמטיקה שונים משדות בטבע, ו"חבורות" אינן באמת חבורות של אנשים, וגם "עצים" אינם העצים המוכרים לנו מחיי היום־יום. עבור מתמטיקאי עץ הוא מונח מתמטי:



איור 1. מימין: עץ משפחה; משמאל: הנוסחה הכימית לאתנול

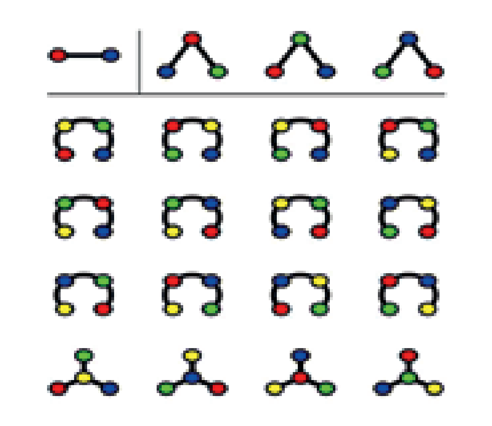
עץ הוא "גרף" הבנוי מ"קודקודים" ומ"צלעות", ולו שתי תכונות: הוא "קשיר" ואין בו "מעגלים".

בהסבר הזה החלפתי מונח אחד שיש להסבירו במשפט שלם המורכב מכמה מונחים שעדיין יש להסבירם. אנסה בהמשך להסביר זאת ביתר פירוט ובעזרת דוגמאות, אבל אעיר שניתן לראות בהרצאה שלי כמספרת סיפור שאני מבקש לעניין אתכם בו, אף שמפאת קוצר היריעה חלקים ממנו יישארו סתומים (גם במחקר עצמו ניתן לראות ניסיון להבין סיפור מעניין מאוד, שמפאת קוצר ידנו חלקים רבים בו סתומים, ואף יישארו כאלה).

מכל מקום, מתמטיקאי אנגלי חשוב, ששמו ארתור קיילי (Cayley), הצליח לחשב את מספר כל העצים שיש להם n קודקודים מסומנים, והגיע לנוסחה הזאת, הקרויה על שמו:

נוסחת קיילי:
מספר העצים בעלי n קודקודים הוא n^{n-2}

המוטיבציה של קיילי הגיעה דווקא מכימיה, כיוון שעצים משמשים לתיאור מולקולות כימיות – הקודקודים הם האטומים, והצלעות הם הקשרים הכימיים.



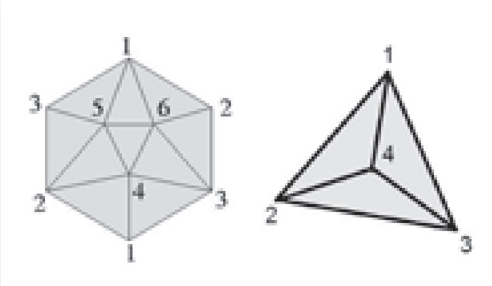
איור 2. בתמונה אנו רואים את כל העצים בני שניים, שלושה וארבעה קודקודים מסומנים (הקודקודים מסומנים בצבעים שונים). נתבונן בגרף השמאלי בשורה השנייה, שקודקודיו מסומנים בצהוב, ירוק, אדום וכחול. אם נשמיט צלע, למשל את הצלע שבין הקודקוד הכחול לקודקוד הירוק, נפגע בתכונת הקשירות, כלומר נקבל שני חלקים לא קשורים. אם נוסיף צלע, למשל מהקודקוד האדום לכחול, נקבל מבנה מעגלי.

נוסחת קיילי קובעת, כפי שממחישה התמונה, שיש עץ אחד בעל שני קודקודים, שלושה עצים בעלי שלושה קודקודים, ו־16 עצים בעלי ארבעה קודקודים.

ניתן לראות בעצים מבנים גאומטריים חד־ממדיים, וכאשר הייתי תלמיד דוקטורט צעיר ב־1980 התעניינתי באפשרות להגדיר עצים דו־ממדיים (ואף בממדים גבוהים יותר) ולהרחיב את נוסחת קיילי. בעצים דו־ממדיים שניסיתי להגדיר יש מלבד קודקודים וצלעות גם "פאות" משולשיות. בממד 2 אנו מרשים לצלעות ליצור מבנה מעגלי אבל דורשים שכל "חור" שנוצר על ידי הצלעות יהיה ניתן למילוי באמצעות פאות משולשיות. לתכונה זו קוראים "קשירות חד־ממדית". עוד לפני שידעתי כיצד להגדיר בדיוק עצים דו־ממדיים, הצעתי תשובה חיננית זאת לספירתם:

מספר העצים הדו־ממדיים בעלי n קודקודים הוא $n^{(n-2)(n-3)/2}$

התשובה נכונה ל־n=3,4,5, אבל הייתה בה בעיה חמורה: היא שגויה ל־n=6 (!) ל־n=6 הנוסחה נותנת 46,656, אבל אני הצלחתי לזהות 46,608 עצים דו־ממדיים בעלי שישה קודקדים ועוד 12 מקרים מפוקפקים (שגם אם נכלול אותם לא נגיע לתוצאה המבוקשת). הדרך שלי להתמודד עם הבעיה, והינה אני כבר מגלה לכם את אחד מרזי המקצוע, הייתה לשנות את השאלה ולהתאים אותה לתשובה המבוקשת.



איור 3. מימין: עץ דו־ממדי בעל 4 קודקודים, 6 צלעות ו־3 פאות משולשיות; משמאל: עץ דו־ממדי מפוקפק בעל 6 קודקודים, 15 צלעות ו־10 פאות משולשיות (בציור שלושה קודקודים ושלוש צלעות מיוצגים פעמיים, ויש לנסות לדמיין קיפול של הצורה הגאומטרית שמזהה קודקודים וצלעות שמופיעים פעמיים).

הרעיונות שבאו לידי ביטוי בשינוי השאלה ובהתאמתה לתשובה המבוקשת פותחים צוהר לכמה נושאים מרכזיים במתמטיקה המודרנית. נושא חשוב הקשור לענף של המתמטיקה הקרוי "טופולוגיה" הוא קשירות רב־ממדית. הנושא התפתח בסוף המאה התשע־עשרה ותחילת המאה העשרים, והוא קשור למתמטיקאים בטי (Betti) ופואנקרה (Poincaré).◄

* בטי, מתמטיקאי איטלקי שחי בסוף המאה התשע־עשרה, התאים לגוף דו־ממדי מספר שמודד קשירות חד־ממדית. כאשר המספר של בטי הוא אפס, הגוף הוא "קשיר" בעיני בטי.

* פואנקרה הבין שיש להתאים פרמטר עדין יותר: חבורה(!) הנקראת "חבורת ההומולוגיה". כאשר המספר של בטי שווה 0, חבורת ההומולוגיה היא בעלת מספר סופי של איברים. הגוף הוא "קשיר" בעיני פואנקרה רק כאשר בחבורה הזאת יש איבר אחד בלבד.

> פואנקרה היה אחד מגדולי המתמטיקאים מאז ומעולם, ועבודתו הניחה יסודות מתמטיים גם לתורת היחסות הפרטית של איינשטיין. פואנקרה עצמו לא השתכנע מתורתו של איינשטיין ומיאן לקבל אותה.

כאן אנו פוגשים את מושג ה"חבורה", שהיה נושא מרכזי במחקר המתמטי במאה התשע־עשרה, וגם את מושג ה"הומולוגיה", שהתגלה והפך למרכזי במאה העשרים.

מה שהתברר לי בנוגע לעצים דו־ממדיים הוא שכדי לקבל את הנוסחה המבוקשת, מבנים שמספר בטי שלהם מתאפס, יש לסופרם לפי ריבוע מספר האיברים של חבורת ההומולוגיה שלהם. 12 המקרים המפוקפקים הם בדיוק מקרים שבטי קבע עבורם "קשיר", אבל בחבורת ההומולוגיה שלהם יש שני איברים, ולפיכך צריך לספור אותם ארבע פעמים(!) הנוסחה שמצאתי וששימחה אותי מאוד קבעה שלכל מספר של קודקודים (וגם לכל ממד) יש להביא בחשבון את העצים לפי ההגדרה של בטי, אבל באותם מקרים שאין הסכמה בין בטי לפואנקרה, יש לספור אותם עם משקל ששווה לריבוע גודל חבורת ההומולוגיה. את התוצאה במלואה ניתן לתאר בנוסחה מתמטית פשוטה למראה:

$$\sum |H_{k-1}(K)|^2 = n^{\binom{n-2}{k}}$$

אעיר לסיום פרק זה שהמושג "עצים" חשוב בענפים שונים של המתמטיקה, ומתמטיקאים עוסקים גם בעצים אינסופיים ובהרחבות רב־ממדיות שלהם (שקוראים להם "בניינים"). הקשר בין מבנים בדידים (כמו עצים) למבנים רציפים חשוב לכל ארבע החידות שלנו, ואזכיר שאיליה ריפס הגדיר מושג רציף רב־השפעה של "עצים ממשיים". ולבסוף אעיר כי נתי ליניאל, יובל פלד ואנוכי חזרנו לאחרונה להתמודד עם השאלה המקורית של ספירת עצים דו־ממדיים, בלי משקולות.

איור 4. נוסחאות מתמטיות מאפשרות לנו לקודד בתמציתיות רעיונות מורכבים, אך יש להן גם שימושים לא צפויים: ברנרד בנט (Benet) השתמש בעבודת אומנות בנוסחה מתמטית שלי לחקר ממדים גבוהים (משמאל), ואחותי תמר קלעי הכינה לי קופת חיסכון מקרמיקה שעליה נוסחאות במתמטיקה (מימין). מלבד הנוסחה לעצים דו־ממדיים בוודאי תזהו עליה נוסחה מוכרת: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$. אבי הציג לי אותה כשהייתי בן שש, והיא מייד שבתה את ליבי. כאשר שיתפתי בסיפור עמיתים למקצוע ברחבי העולם, התברר שכמה מהם חוו חוויה דומה.

חידה 2 (בורסוק, 1933):
האם תמיד אפשר לכסות קבוצה בממד n ב־n+1 קבוצות בקוטר קטן יותר?

נעבור עכשיו לחידה השנייה, המפליגה לעולמות של הממדים הגבוהים. אזכיר שקוטר של קבוצה הוא המרחק הגדול ביותר בין שתי נקודות בה. מציע החידה קרול בורסוק (Borsuk) היה מתמטיקאי פולני חשוב, הידוע בתרומותיו הרבות לענף הגאומטרייה. בין השאר גילה גוף גאומטרי, הקרוי "החצורה של

בורסוק", שקשור לעצים דו־ממדיים, שעליהם דיברתי בחידה הראשונה. בורסוק הבין שבשני ממדים התשובה לחידה חיובית ונובעת מתוצאה מ־1906 על אריזת צורות במשושים. הוא האמין, וכך גם רבים אחרים, שהתשובה חיובית בכל ממד.

איור 5. בציור הימני אנו רואים צורה גאומטרית כחולה בקוטר 1. הציור השמאלי מדגים שניתן לחסום אותה במשושה משוכלל, שניתן לחלקו לשלושה מחומשים בעלי קוטר קטן מאחד.

כמה מילים של הסבר על ממדים גבוהים. המרחב המוכר לנו הוא תלת־ממדי. מהי בכלל המשמעות של מרחבים מממדים גבוהים יותר? מפתיע אך זו שאלה שלמתמטיקאי קל לענות עליה, וההסבר לכך הוא בקשר שבין גאומטרייה לבין אלגברה, שאותו פיתח רנה דקארט. דקארט הבין, ואנו כבר רגילים לזה, שניתן לייצג נקודה במישור באמצעות שתי קואורדינטות (שני מספרים), ונקודה במרחב – באמצעות שלוש קואורדינטות. מדוע לעצור בשלושה ממדים? הרי באמצעות עשר קואורדינטות אפשר "לתאר" ללא קושי גאומטרייה עשר־ממדית, ובאמצעות מאה קאורדינטות – גאומטרייה מאה־ממדית. בעזרת האלגברה אפשר להגדיר מרחק בין שתי נקודות גם במרחבים מממד גבוה ולתאר עצמים גאומטריים באמצעות נוסחאות אלגבריות. זכורה לי הרצאת הבכורה של יורם לינדנשטראוס כאן באקדמיה ב־1985, שבה הוא תיאר מרחבים אף עם אינסוף־ממדים.

בתחילת שנות התשעים עבדתי על השאלה של בורסוק עם ג'ף קהאן, שותף אמריקאי למחקר. לעיתים ניסינו להוכיח שהתשובה חיובית, ולעיתים שהיא שלילית. ג'ף היה לקראת ביקור בארץ, והתנהלה בינינו תכתובת

איור 6. כאשר מתארים את הקובייה התלת־ממדית בעזרת אלגברה, קל להרחיב את ההגדרה לארבעה ממדים.

הדוא"לית המשעשעת הזאת:

גיל: על מה נעבוד בביקור שלך בישראל?

ג'ף: נפתור את בעיית בורסוק!!

גיל: ומה נעשה בשבוע השני?!

ג'ף: נכתוב את המאמר.

למרבה ההפתעה, זה בדיוק מה שקרה. הביקור של ג'ף ומשפחתו היה רצוף בתקלות, ורק במוצאי שבת של השבוע הראשון נפגשנו לדון בשאלה וחשבנו על כיוון לפתור אותה. למחרת המשכנו לדון בה בבית בלגיה באוניברסיטה, והדברים נראו פשוטים יותר ויותר עד שהגענו לפתרון. מצאנו בנייה בממדים גבוהים (מעל ממד אלפיים) שמראה שהתשובה היא שלילית.

באוזני מתמטיקאים ניתן לתאר את הבנייה שלנו בשבע מילים: "מכפלה טנסורית של ספירת היחידה ה־n־ממדית בעצמה."

ההוכחה גם היא פשוטה ומשתרעת על פני חצי עמוד. אבל קצרה ופשוטה ככל שתהא, היה מסובך להגיע אליה. ג'ף, שלמד ספרות אנגלית לתואר ראשון, מצא ציטוט הולם לתיאור המצב מהספר "מובי דיק" של הרמן מלוויל: "However contracted, that definition is the result of expanded meditation."

השתמשנו בשני רעיונות בהוכחה: הרעיון האחד הוא לעבור מבעיה רציפה לבעיה בדידה שעוסקת בגרפים, והרעיון השני הוא לנקוט את הגישה האסימפטוטית ולנתח את המצב בממדים גבוהים. שני הרעיונות קשורים קשר הדוק למתמטיקאי מפורסם מהמאה העשרים – פול ארדש. ◄

חידה 3:
מהן שיטות הבחירות החסינות בפני טעויות בספירת הקולות?

בחידתי השלישית, המתמטיקה פוגשת שימושים מעשיים: הבנה ותכנון של שיטות בחירות.

איור 7. ספירה חוזרת של קולות בפלורידה 2000

רבים ודאי זוכרים את המראה של ספירת הקולות החוזרת בפלורידה בבחירות לנשיאות בארצות הברית בשנת 2000. האם שיטת הבחירות האמריקאית, המבוססת על אלקטורים, היא מטבעה רגישה לשגיאות יותר משיטת הרוב רגישה להן? ומהי השיטה היציבה ביותר? איתי בנימיני, עודד שרם ואנוכי חקרנו בעיות אלה ודומות להן.

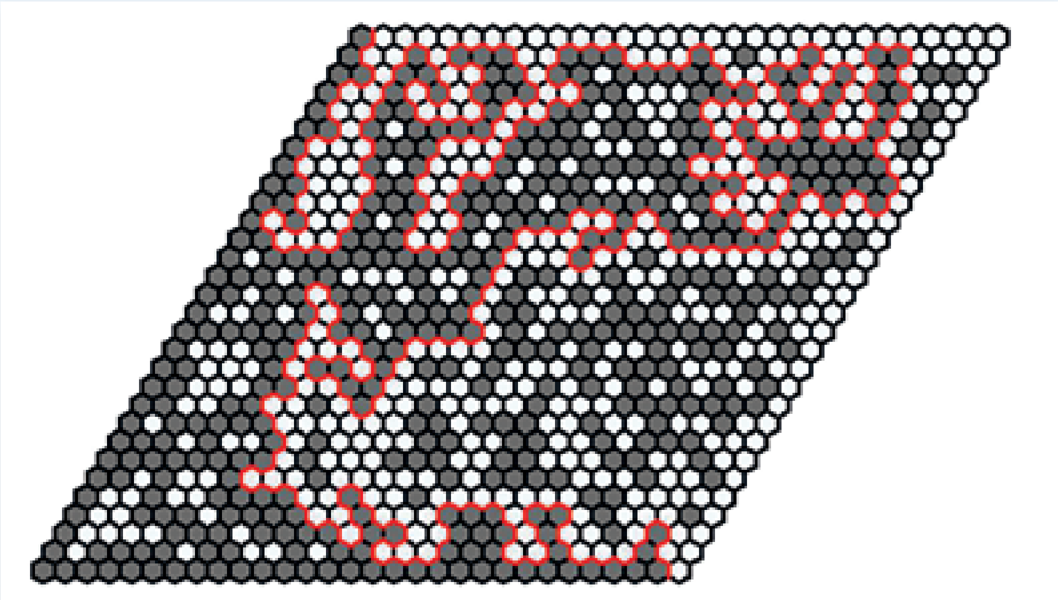
השאלה ששאלנו היא זו: כשיש שני מועמדים, וכל מצביע בוחר ביניהם באקראי ובהסתברות שווה (ללא תלות), מה היציבות של התוצאה כאשר בספירת הקולות אחוז אחד מהקולות נספר הפוך (במתמטיקה נוהגים לכנות שגיאות כאלה "רעש")?

הגדרנו מתמטית מדד לרגישות לרעש של שיטות בחירות ומצאנו ששיטות רוב משוקלל חסינות בפני רעש, כלומר שכאשר הסיכוי לשגיאה קטן, הסיכוי שהשגיאות יטו את התוצאה קטן אף הוא. הראינו גם שכל שיטה חסינה בפני רעש "קרובה" לשיטת רוב משוקלל. בעבודה מאוחרת יותר הראו אודונול, אולסקייביץ' ומוסל כי שיטת הרוב חסינה ביותר יחסית לשיטות שאינן דיקטטוריות באופיין.

העבודה שלנו התפרסמה בשנת 1999, שנה לפני שעלתה השאלה לכותרות בבחירות לנשיאות בארצות הברית, והיא לא עסקה כלל בבחירות. וכאן אפשר לגלות סוד מקצועי נוסף: מתמטיקאים ממחזרים את המודלים שלהם, ואותו מודל יכול לשמש למטרות שונות. אנו התעניינו במודל מכיוון אחר לגמרי: רצינו להבין את בעיית הפרקולציה במישור. מודל הפרקולציה הוא מודל מתמטי שמקורו בפיזיקה סטטיסטית, והוא מומחש באיור 8. במאמר שלנו הראינו שאם נאמץ שיטת בחירות על פי מודל הפרקולציה, תהיה שיטה זו רגישה מאוד לרעש. תובנה זו אינה מועילה כלל בתכנון שיטות בחירות טובות, אבל היא מאפשרת להבין תופעות מעניינות בחקר מודל הפרקולציה.

לאחר הבחירות לנשיאות בארצות הברית בשנת 2000 ניסינו איתי, עודד, אלחנן מוסל ואני להבין את הרלוונטיות לבחירות של המודל שלנו ושל מושג הרגישות לרעש שהגדרנו. האם מדד הרגישות לרעש שהצענו רלוונטי אף על פי שההנחה שבבסיסו, שלפיה כל בוחר מצביע באקראי ובהסתברות שווה לאחד המועמדים, רחוקה מהמציאות? הניסיון לקשר בין מודלים במתמטיקה לבין שאלות הנוגעות לבחירות (ובהרחבה רבה יותר למדעי החברה) הוא מרתק ומסובך, וזכות ראשונים לקשר הזה שמורה למרקיז קונדורסט, מתמטיקאי ופילוסוף, דמוקרט, איש זכויות אדם ופמיניסט צרפתי מהמאה השמונה־עשרה.

ה"פרדוקס של קונדורסט" קובע שייתכן שבבחירות להנהגת המדינה שבהן שלוש מועמדות: ציפי, שלי, ואילת, רוב המצביעים יעדיפו את ציפי על שלי, ורוב



איור 8. מודל הפרקולציה במישור: כל משושה מקבל בהסתברות 1/2 צבע אפור ובהסתברות 1/2 צבע לבן.

המצביעים יעדיפו את שלי על אילת, אבל בכל זאת רוב המצביעים יעדיפו את אילת על ציפי (כדי לראות זאת חִשבו על שלושה סוגי מצביעים ומספר שווה של מצביעים מכל סוג. מצביע מהסוג הראשון מדרג את שלי ראשונה, את ציפי שנייה ואת שלי שלישית. מצביע מהסוג השני מדרג את ציפי ראשונה, את אילת שנייה ואת שלי שלישית. מצביע מהסוג השלישי מדרג את אילת ראשונה, את שלי שנייה ואת ציפי שלישית). מתברר שכאשר מנסים להעריך הסתברותית את הסיכוי לתופעה כזו, חישובי הרגישות לרעש באים לידי ביטוי.

לפני שאעבור לחידה האחרונה, אקדים ואומר שחלק חשוב במחקר המתמטי, ובמחקר המדעי כולו, הוא הבנת המגבלות והקשיים שלנו עצמנו. מאמצים של מאות בשנים למצוא נוסחה לפתרון משוואות ממעלה חמישית פינו את מקומם להבנה שהנוסחה המבוקשת איננה בנמצא, וזו הייתה נקודת ההתחלה של האלגברה המודרנית (ובמרכזה תורת החבורות). מאמצים של מאות שנים להוכיח את אקסיומת המקבילים באמצעות האקסיומות האחרות התבררו כבלתי אפשריים, וההבנה הזאת הצמיחה סוגים אחרים של גאומטרייה לא־אאוקלידית. המאמץ להוכיח מתמטית שבמתמטיקה עצמה אין סתירות התברר כבלתי אפשרי (משפט גדל).

אחת התובנות החשובות של המאה העשרים היא שהמחשב אינו כול־יכול, ושיש בעיות חישוב פשוטות לניסוח שגם בעזרת מחשבים לעולם לא נוכל לפתור. יהושע בר־הלל כתב עבודה מפורסמת בשנות השישים על הקושי שבתרגום ממוחשב בין שפות. הוא לא הצביע על מגבלה עקרונית שלעולם לא נתגבר עליה, אלא על קשיים רציניים שרבים מאנשי הבינה המלאכותית של דורו החמיצו. ענר שלו כתב בחוברת הראשונה של כתב העת "אודיסאה" מאמר מרתק שנקרא "אי־אפשר", הפותח בקפקא, מסיים בעקרון אי־הוודאות במכניקת הקוונטים ועוסק באי־האפשרות במדע ומעבר לו.

אנו נשאל על האפשרות של מחשבים קוונטיים. ◄

חידה 4:
האם חישוב קוונטי אפשרי?

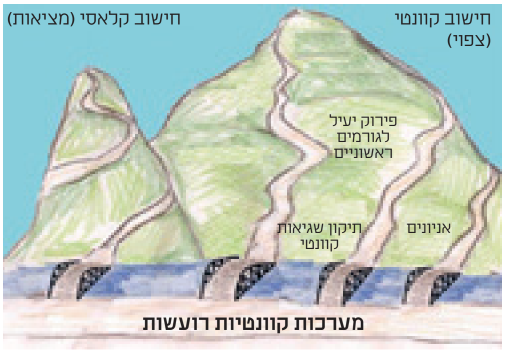
מציאת נתיבים לא צפויים וקיצורי דרך לחישוב מאפיינת הישגים רבים במתמטיקה ובמדעים. בשנות השבעים של המאה הקודמת גילה מיכאל רבין תגלית מפתיעה - אקראיות יכולה להיות לעזר בחישוב.

מודל המחשב הקוונטי, שנתגלה על ידי פיינמן ודויטש, מבוסס על המכניקה הקוונטית. המודל הוצע בשנות השמונים, והוא מאפשר לבצע ניסים ונפלאות בתחום החישוב. המחשב הקוונטי הוא מערכת פיזיקלית היפותטית המנצלת תופעות קוונטיות כמו התאבכות כדי להעצים את כוח החישוב. חקר החישוב הקוונטי משלב באופן מרתק פיזיקה, מתמטיקה ומדעי המחשב.

בשנות התשעים גילה פטר שור שמחשבים קוונטיים יאפשרו לבצע משימות חישוביות מסוימות מהר במאות סדרי גודל ממחשבים רגילים, ובייחוד יאפשרו לשבור את רוב שיטות ההצפנה הנהוגות כיום. אז גם הועלו הספקות הראשונים בנוגע למודל: מערכות קוונטיות הן מטבען "רועשות" ולא יציבות. פטר שור עצמו מצא מפתח לפתרון אפשרי לבעית הרעש: צפנים מתקני שגיאות קוונטיים (אגב, אחד הכיוונים ליצירת צפנים קוונטיים נקרא "חישוב קוונטי טופולוגי", והוא מבוסס על חבורות ההומולוגיה שפואנקרה גילה בראשית המאה הקודמת, ושהזכרתיה בחידה הראשונה).

באמצע שנות התשעים חקרו דורית אהרונוב ומיכאל בן־אור (בד בבד עם שתי קבוצות אחרות) את מודל המחשב הקוונטי הרועש והראו שמחשבים קוונטיים רועשים עדיין מאפשרים לבצע ניסים ונפלאות, ובלבד שהמהנדסים יצליחו להוריד את רמת הרעש מתחת לסף מסוים. זה היה הישג מרשים, המונח בבסיסן של שתי האפשרויות האלה: אפשרות אחת, שמבטאת דעה רווחת, היא שבניית מחשבים קוונטיים אפשרית, שהאתגר שנותר הוא הנדסי מעיקרו, שמחשבים כאלה ייבנו בעשורים הקרובים, ושבשנים הקרובות יצליחו לבנות במעבדה את הצפנים הקוונטיים באיכות הדרושה לתיקון שגיאות.

אפשרות שנייה, שמבטאת את עמדתי, היא שיהיה בלתי אפשרי לבנות צפנים קוונטיים שדרושים



כן (דעה רווחת)! קבוצות רבות של פיזיקאים ניסיוניים נמצאות במרוץ להדגמת עליונות חישובית קוונטית ואף לבניית מחשבים קוונטיים שבהם אלפי יחידות חישוב.

לא! זו עמדתי על בסיס ניתוח המודל של חישוב קוונטי רועש בסקאלות שונות.

איור 9. האם חישוב קוונטי אפשרי?

לחישוב קוונטי, וגם יהיה בלתי אפשרי להדגים עליונות חישובית קוונטית במערכות קוונטיות אחרות. אנסה להסביר למה.

המחקר שלי מבוסס על אותו מודל של רעש שהביא את החוקרים בשנות התשעים דווקא לאופטימיות בנוגע לחישוב קוונטי, והוא מצביע על הצורך בניתוח שונה בסקאלות שונות. הניתוח שלי מראה שמחשבים קוונטיים רועשים בסקאלה הקטנה (של עד כמה עשרות יחידות חישוב) מבטאים כושר חישוב פרימיטיבי כל כך, שלא יאפשר יצירת צפנים קוונטיים שנדרשים כאבני בניין עבור מחשבים קוונטיים בסקאלה גדולה יותר.

תשאל הקוראת: כיצד העולם הקוונטי הרועש מאפשר אינפורמציה וחישוב קלאסי? ההבדל בין אינפורמציה קלאסית לקוונטית קשור לחידה 3. קידוד בעזרת חזרות ופיענוח בעזרת כלל הרוב מאפשר אינפורמציה וחישוב קלאסי: שיטת הרוב "מתקנת שגיאות" וחסינה בפני רעש, ולכן אפשר לממש אותה במערכת חישובית פרימיטיבית מאוד. הדבר מאפשר, בסקאלות גדולות יותר, אינפורמציה וחישוב קלאסי.

חידת המחשב הקוונטי מרתקת מאוד: האם יהיה ניתן לפרוץ את המגבלות של החישוב הקלאסי ולזרז את משך החישוב לבעיות מסוימות במאות סדרי גודל? בטווח הקרוב יותר, האם יהיה ניתן לבנות צפנים קוונטיים שיאפשרו אינפורמציה קוונטית יציבה שיהיו אבני בניין למחשבים קוונטיים? והאם יהיה ניתן להדגים בקרוב עליונות חישובית קוונטית באמצעות מערכות קוונטיות פשוטות? כמיליארד וחצי דולר לשנה מוקצים לעשרות קבוצות מחקר (בעיקר ניסייות) למחקר גלוי בטכנולוגיות קוונטיות, והרבה מזה מיועד להשגת היעדים שציינתי. לפי הניתוח שלי, כל היעדים האלה נידונים לכישלון!

האם הצלחתי בניתוח החלופי שאני מציע לאותו מודל עצמו לגרום למומחים שהציעו וחקרו את המודל הזה לשנות את עמדתם? כלל וכלל לא! מומחים אחרים טוענים שכעיקרון, רעש ושגיאות אינם יכולים להיות מכשול מהותי לחישוב קוונטי. גם האינטואיציה של פיזיקאים ניסיוניים העוסקים בכך נוטה לאופטימיות.

אם עמדתי תתברר כנכונה, ניתן לצפות שבצד האכזבה, הבנת כישלון החישוב הקוונטי יישא פירות בחקר מערכות קוונטיות. מובן שאני סקרן מאוד לראות מה יהיו פני הדברים.

מכל מקום, ניתן לראות שאפילו במתמטיקה, ובעיקר במקומות שבהם המתמטיקה נפגשת עם תחומי מדע וחיים אחרים, ניתן למצוא ויכוחים ואי־הסכמות נוקבים, מעניינים ומרגשים. ■

אני, רעייתי ומשפחתי מלאי שמחה ואסירי תודה על הבחירה בי לאקדמיה הלאומית למדעים שלנו. ברצוני להודות מקרב לב למוריי, עמיתיי ותלמידיי, ואציין במיוחד את מדריכי לדוקטורט, עמיתי וחברי היקר פרופ' מיכה אשר פרלס. תודתי למיה בר־הלל וללאונרד שולמן על הערותיהם למאמר זה ולבתי נטע קלעי על איורים 7 ו־9.